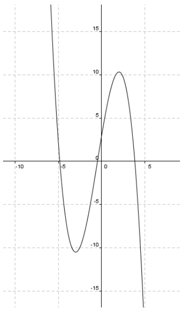
Hoofdstuk 13: Afgeleide en tweede afgeleide

13.1 De tweede afgeleide

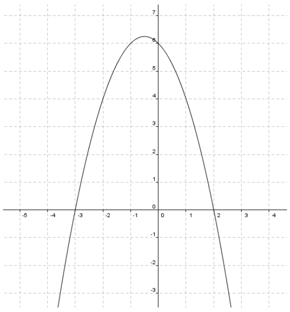
<u>Opgave 1:</u>

a.



b. f is dalend op $\langle\leftarrow,-3\rangle$ en $\langle 2,\rightarrow\rangle$
f is stijgend op $\langle -3,2\rangle$
toenemende stijging op $\langle -3,-\frac{1}{2}\rangle$
afnemende stijging op $\langle -\frac{1}{2},2\rangle$

c. $f'(x) = -x^2 - x + 6$

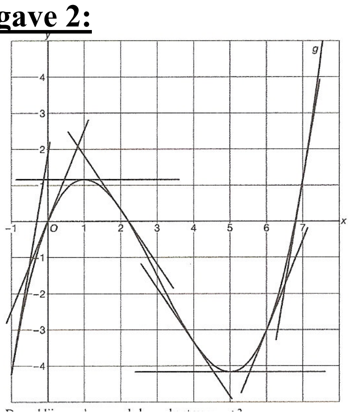


d. $x_P = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$

e. bij $x_P = -\frac{1}{2}$ gaat de grafiek over van een toenemende stijging in een afnemende stijging

<u>Opgave 2:</u>

a.



b. $x < 3$

c. $(3,-1\frac{1}{2})$

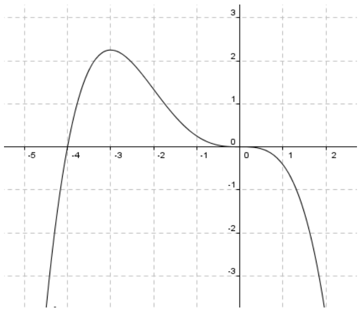
d. onder
boven

Opgave 3:

Bij $(-1,\ln\sqrt{2})$ gaat de grafiek over van een toenemende daling in een afnemende daling.

Bij $(1,\ln\sqrt{2})$ gaat de grafiek over van een toenemende stijging in een afnemende stijging.

Opgave 4:



a. $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$

$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$

$f''(x) = -x^2 - 2x = 0$

$-x(x+2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$

buigpunten: $(0,0)$ en $(-2,1\frac{1}{3})$

b. $f'(0) = 0$ dus in $(0,0)$

Opgave 5:

$f(x) = x \cdot e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x) \cdot e^x$

$f''(x) = 1 \cdot e^x + (1+x) \cdot e^x = e^x + e^x + x \cdot e^x = (2+x) \cdot e^x = 0$

$x = -2 \quad \vee \quad e^x = 0$ (k.n.)

$f'(-2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$

$f(-2) = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$

$k: \quad y = -\frac{1}{e^2}x + b$ door $(-2,-\frac{2}{e^2})$

$-\frac{2}{e^2} = \frac{2}{e^2} + b$

$b = -\frac{4}{e^2}$

$k: \quad y = -\frac{1}{e^2}x - \frac{4}{e^2}$

Opgave 6:

a. $f_5(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x - 5$

$f_5'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$

$f_5''(x) = 3x^2 - 12x + 10 = 0$

$D = 24$ dus twee oplossingen, dus de grafiek van f heeft twee buigpunten

b. $f_6(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x - 5$

$f_6'(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

$f_6''(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 0$

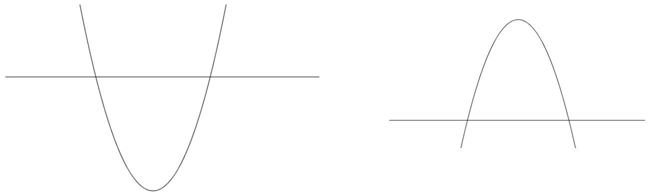
$D = 0$ dus één oplossing

voor iedere x geldt dat $f_6''(x) \geq 0$ dus er is geen buigpunt

c. de grafiek van een willekeurige vierdegraads functie heeft als tweede afgeleide een tweedegraads functie

dus $f''(x) = ax^2 + bx + c = 0$

als $D > 0$ dan heeft de grafiek
van f' twee extremen dus heeft
de grafiek van f twee buigpunten



als $D = 0$ dan heeft de grafiek
van f' geen extremen dus heeft
de grafiek van f geen buigpunten

als $D < 0$ dan heeft de grafiek
van f' geen extremen dus heeft
de grafiek van f geen buigpunten

<u>Opgave 7:</u>

$f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10$

$f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + 1\frac{1}{2}x$

$f_p''(x) = 12x^2 + 6px + 1\frac{1}{2} = 0$

$D = 36p^2 - 72 \leq 0$

$36p^2 \leq 72$

$p^2 \leq 2$

$-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$

<u>Opgave 8:</u>

a. $f(x) = \dfrac{5 + 10\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{10}{x} - (5 + 10\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{10 - 5 - 10\ln x}{x^2} = \frac{5 - 10\ln x}{x^2} = 0$$

$5 - 10\ln x = 0$

$-10\ln x = -5$

$\ln x = \frac{1}{2}$

$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$y = \dfrac{10}{\sqrt{e}}$

$B_f = \langle \leftarrow, \dfrac{10}{\sqrt{e}}]$

b. $$f''(x) = \frac{x^2 \cdot -\frac{10}{x} - (5 - 10\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-10x - 10x + 20x\ln x}{x^4} = \frac{-20x + 20x\ln x}{x^4} = 0$$

$-20x + 20x\ln x = 0$

$20x(-1 + \ln x) = 0$

$x = 0$ (k.n.) $\vee$ $\ln x = 1$

$x = e$

$y = \frac{15}{e}$

dus het buigpunt is het punt $(e, \frac{15}{e})$

Opgave 9:

a. $f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3$

$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} \cdot (\ln x + 1) = 0$

$\frac{2}{x} = 0 \quad \vee \quad \ln x = -1$

k.n. $\quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$y = -4$

top $(\frac{1}{e}, -4)$

b. $f''(x) = \dfrac{-2}{x^2} \cdot (\ln x + 1) + \dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2\ln x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{-2\ln x}{x^2} = 0$

$\ln x = 0$

$x = e^0 = 1$

$y = f(1) = -3$

$f'(1) = 2$

$y = 2x + b$ door $(1, -3)$

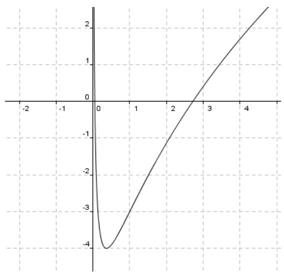
$-3 = 2 + b$

$b = -5$

$y = 2x - 5$

c. $F(x) = x\ln^2 x - 3x$

$F'(x) = 1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} - 3 = \ln^2 x + 2\ln x - 3 = f(x)$



$\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0$

$(\ln x + 3)(\ln x - 1) = 0$

$\ln x = -3 \quad \vee \quad \ln x = 1$

$x = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \quad \vee \quad x = e$

vlakdeel V ligt onder de x-as , dus:

$$Opp(V) = -\int_{\frac{1}{e^3}}^{e} (\ln^2 x + 2\ln x - 3)dx = -[x\ln^2 x - 3x]_{\frac{1}{e^3}}^{e} = -(e - 3e - (\tfrac{9}{e^3} - \tfrac{3}{e^3})) = 2e + \tfrac{6}{e^3}$$

Opgave 10:

a. $f(x) = 6x \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3}$

$f'(x) = 6 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} + 6x \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} \cdot -\frac{1}{8}x^2 = (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3}$

$\frac{3}{4}x^3 = 6 \quad \vee \quad e^{-\frac{1}{24}x^3} = 0$

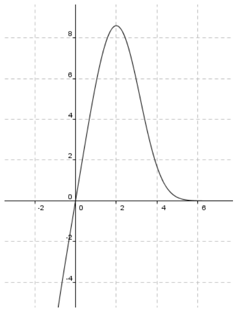
$x^3 = 8 \qquad$ k.n.

$x = 2$

b. $f''(x) = -\frac{9}{4}x^2 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} + (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} \cdot -\frac{1}{8}x^2$

$= -\frac{9}{4}x^2 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} - \frac{3}{4}x^2 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} + \frac{3}{32}x^5 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3}$

$= (-3x^2 + \tfrac{3}{32}x^5)\cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} = 0$



$-3x^2 + \tfrac{3}{32}x^5 = 0 \quad \vee \quad e^{-\frac{1}{24}x^3} = 0$

$3x^2(-1+\tfrac{1}{32}x^3) = 0$ k.n.

$x = 0 \quad \vee \quad \tfrac{1}{32}x^3 = 1$

$x = 0 \quad \vee \quad x^3 = 32$

$x = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt[3]{32}$

dus voor de top geldt: $x = \sqrt[3]{32}$

c. $f'(0) = 6$

dus $a = 6 \quad \vee \quad a \le 0$

Opgave 11:

$f(x) = 4\sin^2(x)$

$f'(x) = 8\sin(x)\cdot\cos(x) = 4\sin(2x)$

$f''(x) = 4\cos(2x)\cdot 2 = 8\cos(2x) = 0$

$\cos(2x) = 0$

$2x = \tfrac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$

$x = \tfrac{1}{4}\pi + k\cdot\tfrac{1}{2}\pi$

$x = \tfrac{1}{4}\pi$

$y = 2$

$f'(\tfrac{1}{4}\pi) = 4$

$y = 4x + b$ door $(\tfrac{1}{4}\pi, 2)$

$2 = \pi + b$

$b = 2 - \pi$

$y = 4x + 2 - \pi$

$x = \tfrac{3}{4}\pi$

$y = 2$

$f'(\tfrac{3}{4}\pi) = -4$

$y = -4x + b$ door $(\tfrac{3}{4}\pi, 2)$

$2 = -3\pi + b$

$b = 2 + 3\pi$

$y = -4x + 2 + 3\pi$

Opgave 12:

a. $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$

b. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ dus $x_A + x_B = -\dfrac{2b}{3a}$ (zie opgave a)

$f''(x) = 6ax + 2b = 0$

$6ax = -2b$

$x = -\dfrac{2b}{6a} = -\dfrac{b}{3a}$

$\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-\dfrac{2b}{3a}}{2} = -\dfrac{b}{3a} = x_C$

c. $x = -\dfrac{b}{3a}$ als $a \ne 0$ (zie opgave b)

13.2 Toepassingen van de tweede afgeleide

Opgave 13:

a. $\frac{dC}{dt} = -0{,}0012t^2 + 0{,}08t + 0{,}28$

b. $\frac{dC}{dt}$ geeft de verandering van de concentratie op een tijdstip

c. $\left[\frac{dC}{dt}\right]' = -0{,}0024t + 0{,}08 = 0$

$-0{,}0024t = -0{,}08$

$t = 33\frac{1}{3}$

Opgave 14:

$T' = 80e^{-0{,}2t} \cdot -0{,}2 = -16e^{-0{,}2t}$

$T'' = -16e^{-0{,}2t} \cdot -0{,}2 = 3{,}2e^{-0{,}2t}$

voor iedere t geldt dat $T' < 0$ en $T'' > 0$ dus er is sprake van een afnemende daling

Opgave 15:

a. $100e^{-0{,}01t^2} = 50$

neem $y_1 = 100e^{-0{,}01x^2}$ en $y_2 = 50$

intersect geeft $x = 8{,}33$ dus na 500 seconden

b. $V' = 100e^{-0{,}01t^2} \cdot -0{,}02t = -2t \cdot e^{-0{,}01t^2}$

$V'' = -2e^{-0{,}01t^2} + -2t \cdot e^{-0{,}01t^2} \cdot -0{,}02t$

$= -2e^{-0{,}01t^2} + 0{,}04t^2 \cdot e^{-0{,}01t^2}$

$= (-2 + 0{,}04t^2) \cdot e^{-0{,}01t^2} = 0$

$0{,}04t^2 = 2 \quad \vee \quad e^{-0{,}01t^2} = 0$

$t^2 = 50$ k.n.

$t = \sqrt{50}$ dus na 424 seconden

c. $V'(\sqrt{50}) = -2\sqrt{50} \cdot e^{-0{,}5}$

dus $V' = -2t \cdot e^{-0{,}01t^2} = -\sqrt{50} \cdot e^{-0{,}5}$

neem $y_1 = -2x \cdot e^{-0{,}01x^2}$ en $y_2 = -\sqrt{50} \cdot e^{-0{,}5}$

intersect geeft: $x = 13{,}588$ dus dat is na 815 seconden

dus $815 - 424 = 391$ seconden na het in opgave b genoemde tijdstip

Opgave 16:

a. $N' = e^{-0{,}1t^3 + 0{,}5t^2} \cdot (-0{,}3t^2 + t) = 0$

$e^{-0{,}1t^3 + 0{,}5t^2} = 0 \quad \vee \quad -0{,}3t^2 + t = 0$

k.n. $t(-0{,}3t + 1) = 0$

$t = 0 \quad \vee \quad -0{,}3t = -1$

$t = 3\frac{1}{3}$

dus na $3\frac{1}{3} \cdot 24 = 80$ uur

b. neem $y_1 = (-0{,}3x^2 + x) \cdot e^{-0{,}1x^3 + 0{,}5x^2}$

de optie maximum geeft: $x = 2{,}41$ en $y = 3{,}0$

dus na $2{,}41 \cdot 24 = 58$ uur
de snelheid is dan 3 miljard per dag = 125 miljoen per uur

c. 100 uur is $t = 4\tfrac{1}{6}$
$N'(4\tfrac{1}{6}) = -4{,}4$ miljard per dag = -3074 duizend per minuut

d. 110 uur is $t = 4\tfrac{7}{12}$
$N'(4\tfrac{7}{12}) = -4{,}12 < 0$
$N'' = (-0{,}6t+1) \cdot e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2} + (-0{,}3t^2+t) \cdot e^{-0{,}1t^3+0{,}5t^2} \cdot (-0{,}3t^2+0{,}1t)$
$N''(4\tfrac{7}{12}) = 2{,}89 > 0$ dus afnemend dalend

Opgave 17:

$f(x) = (x^2-3)(x^2-5) = x^4 - 8x^2 + 15$
$f'(x) = 4x^3 - 16x$
$f''(x) = 12x^2 - 16$
$f''(1) = -4$ dus er is sprake van een toenemende daling

Opgave 18:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$$
$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 2 - (2x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+2}{(x^2+1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-4x-2) - (-2x^2-2x+2)\cdot 2 \cdot (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$
$$= \frac{(x^2+1)(-4x-2) - 4x(-2x^2-2x+2)}{(x^2+1)^3}$$
$f'(-3) = -0{,}1$ en $f''(-3) = -0{,}02$ dus een toenemende daling
$f'(0) = 2$ en $f''(0) = -2$ dus een afnemende stijging
$f'(1) = -0{,}5$ en $f''(1) = -0{,}5$ dus een toenemende daling

Opgave 19:

a. $\dfrac{s(3)-s(1)}{3-1} = \dfrac{2{,}1-0{,}3}{2} = 0{,}9 \ {}^{m}\!/_{s}$

b. $v = s' = 0{,}4t + 0{,}1$

c. $v(4) = 1{,}7 \ {}^{m}\!/_{s}$
$v(5) = 2{,}1 \ {}^{m}\!/_{s}$

d. $0{,}4 \ {}^{m}\!/_{s}$
$v(6) - v(5) = 2{,}5 - 2{,}1 = 0{,}4 \ {}^{m}\!/_{s}$

e. $v' = 0{,}4$ dus de verandering van de snelheid is constant

Opgave 20:

Op het moment dat de versnelling 0 is, verandert de snelheid niet meer, dus dan is de snelheid maximaal.

Opgave 21:

a. $s(300) = 5040$ m

b. $v_{gem} = \dfrac{s(300) - s(0)}{300} = \dfrac{5040}{300} = 16{,}8 \ {}^{m}\!/_{s} = 60 \ {}^{km}\!/_{u}$

c. $v(166\frac{2}{3}) = 23\frac{1}{3} \ {}^{m}\!/_{s} = 84 \ {}^{km}\!/_{u}$

Opgave 22:

a. $v_{gem} = \dfrac{s(600) - s(0)}{600} = \dfrac{4320}{600} = 7{,}2 \ {}^{m}\!/_{s} = 26 \ {}^{km}\!/_{u}$

b. $v = -0{,}00012t^2 + 0{,}072t$

$v' = -0{,}00024t + 0{,}072 > 0$

$-0{,}00024t > -0{,}072$

$t < 300$

c. $v' = 0$ voor $t = 300$

$v(300) = 10{,}8 \ {}^{m}\!/_{s} = 39 \ {}^{km}\!/_{u}$

d. $v' = -0{,}00024t + 0{,}072 < 0{,}02$

$-0{,}00024t < -0{,}052$

$t > 216\frac{2}{3}$

Opgave 23:

a. $s(50) = 1125$ m

b. $v(t) = 0{,}009t^2 - t + 40$

$v'(t) = 0{,}018t - 1 < 0$

$0{,}018t < 1$

$t < 55{,}6$ dus de snelheid neemt af tot $t = 55{,}6$

c. $v'(t) = 0{,}018t - 1 = 0$ geeft $t = 55\frac{5}{9}$

$v(55\frac{5}{9}) = 12\frac{2}{9} \ {}^{m}\!/_{s} = 44 \ {}^{km}\!/_{u}$

d. $s(100) = 2000$

dus $v_{gem} = \frac{2000}{100} = 20 \ {}^{m}\!/_{s}$

$0{,}009t^2 - t + 40 = 20$

neem $y_1 = 0{,}009x^2 - x + 40$ en $y_2 = 20$

intersect geeft $x = 26{,}2 \quad \vee \quad x = 85{,}0$

dus op $t = 26$ en $t = 85$ is de snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid op de eerste 100 seconden

e. $-0{,}2 < 0{,}018t - 1 < 0{,}2$

$0{,}8 < 0{,}018t < 1{,}2$

$44\frac{4}{9} < t < 66\frac{2}{3}$

dus gedurende $66\frac{2}{3} - 44\frac{4}{9} = 22$ seconden

Opgave 24:

a. $v(t) = s'(t) = -t^2 + 12t$

$a(t) = v'(t) = -2t + 12$

b. $v(t) = A(t)$ dus je moet de formule van $a(t)$ primitiveren

$v(t) = -1\tfrac{1}{2}t^2 + 10t + c$
je weet de constante c nog niet

Opgave 25:

a. de versnelling is gemiddeld: $0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5 \ {}^{m}\!/\!_{s^2}$
de versnelling duurt 10 seconden, dus de snelheid neemt toe van 0 tot $10 \cdot 2{,}5 = 25 \ {}^{m}\!/\!_{s}$
$Opp(W) = \tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$
dus $Opp(W) = v(10)$

b. $a(t) = -\tfrac{1}{2}t + 5$
$Opp(W) = \tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$
$v(t) = -\tfrac{1}{4}t^2 + 5t$
$v(10) = 25 = Opp(W)$

c. nee, want $v(10) = 27$

Opgave 26:

a. $a(t) = -t^2 + 6t$
$v(t) = -\tfrac{1}{3}t^3 + 3t^2$
$v(6) = 36 \ {}^{m}\!/\!_{s}$

b. $s(t) = -\tfrac{1}{12}t^4 + t^3$
$s(6) = 108$ m

c. $s(10) = s(6) + 4 \cdot 36 = 108 + 4 \cdot 36 = 252$ m

d. $108 + 36(t - 6) = 500$
$108 + 36t - 216 = 500$
$36t = 608$
$t = 16\tfrac{8}{9}$

Opgave 27:

a. $72 \ {}^{km}\!/\!_{u} = 20 \ {}^{m}\!/\!_{s}$
$v(0) = 20$ en $v(t_r) = 0$

b. $\tfrac{1}{2} \cdot t_r \cdot 20 = 30$
$10t_r = 30$
$t_r = 3$ sec

Opgave 28:

a. $108 \ {}^{km}\!/\!_{u} = 30 \ {}^{m}\!/\!_{s}$
remweg $= \tfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot t_r = \tfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 = 90$ m

b. $\tfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot t_r = 60$
$15t_r = 60$
$t_r = 4$ sec

Opgave 29:

a. $54 \ {}^{km}\!/\!_{u} = 15 \ {}^{m}\!/\!_{s}$
$\tfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot t_r = 0{,}75$

$7{,}5t_r = 0{,}75$

$t_r = 0{,}1$ sec

b. $v(0) = 15$ en $v(0{,}1) = 0$

$rc = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-15}{0{,}1} = -150$

$v = 15 - 150t$

$a = -150$

dus 15 keer de valversnelling g

Opgave 30:

a. $36 \ {}^{km}\!/_{u} = 10 \ {}^{m}\!/_{s}$

$v_b = 10$ dus $s_b = 10t$

$a_a = 1{,}5$ dus $v_a = 1{,}5t$ dus $s_a = 0{,}75t^2$

$s_a = s_b$ dus $0{,}75t^2 = 10t$

$t = 0 \quad \vee \quad 0{,}75t = 10$

$t = 0 \quad \vee \quad t = 13\frac{1}{3}$

dus na $13\frac{1}{3}$ sec

b. $v(13\frac{1}{3}) = 1{,}5 \cdot 13\frac{1}{3} = 20 \ {}^{m}\!/_{s} = 72 \ {}^{km}\!/_{u}$

13.3 Raaklijnen aan grafieken

Opgave 31:

a. $rc_k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{e^p}{p}$

b. $rc_k = f'(p) = e^p$

c. $\dfrac{e^p}{p} = e^p$

$e^p = 0 \quad \vee \quad \dfrac{1}{p} = 1$

k.n. $\qquad p = 1$

$f'(1) = e$

$k: \quad y = e \cdot x$

Opgave 32:

a. $rc_m = f'(p)$

$rc_m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\ln p}{p}$

b. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1}{p} = \dfrac{\ln p}{p}$

$\ln p = 1$

$p = e$

$f'(e) = \frac{1}{e}$

$m: \quad y = \frac{1}{e} \cdot x$

Opgave 33:

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{f(x)}{x+4}$ geeft: $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{x+4}$

$2x = x + 4$

$x = 4$

$B(4,2)$

$f'(4) = \frac{1}{4}$

$k: \quad y = \frac{1}{4}x + b$ door $(4,2)$

$2 = 1 + b$

$b = 1$

$k: \quad y = \frac{1}{4}x + 1$

Opgave 34:

a. $f(x) = x^2 + 1$

$f'(x) = 2x$

$f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ geeft $2x = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

$2x^2 = x^2 + 1$

$x^2 = 1$

$x = 1 \quad \vee \quad x = -1$

$f'(1) = 2 \qquad\qquad f'(-1) = -2$

$y = 2x \qquad\qquad y = -2x$

b. $2x = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

$2x(x - 1) = x^2 + 1$

$2x^2 - 2x = x^2 + 1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

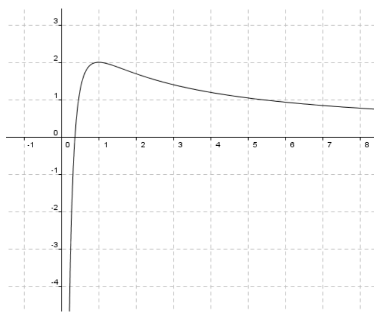
$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$x = 1 + \sqrt{2} \quad \vee \quad x = 1 - \sqrt{2}$

Opgave 35:

a. $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{x \cdot \frac{2}{x} - (2 + 2\ln x) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{2 - 2 - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{-2\ln x}{x^2} = 0$



$\ln x = 0$

$x = 1$

$y = 2$

$B_f = \langle \leftarrow, 2]$

b. $f''(x) = \dfrac{x^2 \cdot \frac{-2}{x} - -2\ln x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-2x + 4x\ln x}{x^4} = 0$

$-2x + 4x\ln x = 0$

$2x(-1 + 2\ln x) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 2\ln x = 1$

k.n. $\qquad \ln x = \frac{1}{2}$

$x = \sqrt{e}$

$y = \frac{3}{\sqrt{e}}$

het buigpunt is $(\sqrt{e}, \frac{3}{\sqrt{e}})$

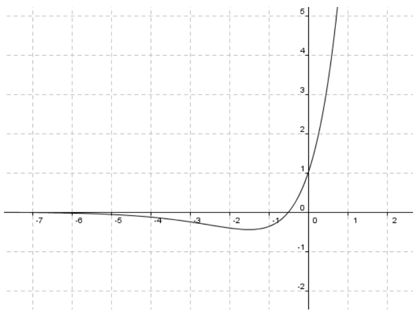
c. $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

$\dfrac{-2\ln x}{x^2} = \dfrac{2 + 2\ln x}{x^2}$

$-2\ln x = 2 + 2\ln x$
$-4\ln x = 2$
$\ln x = -\frac{1}{2}$
$x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$
$f'(\frac{1}{\sqrt{e}}) = e$
$k: \quad y = e \cdot x$

d. $0 < a < e$

Opgave 36:



a. $f(x) = (2x+1)e^x$
$f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x = 0$
$2x+3 = 0 \quad \vee \quad e^x = 0$ (k.n.)
$2x = -3$
$x = -1\frac{1}{2}$
$y = -2e^{-1\frac{1}{2}} = \frac{-2}{e\sqrt{e}}$
$B_f = [\frac{-2}{e\sqrt{e}}, \rightarrow\rangle$
$f''(x) = 2e^x + (2x+3)e^x = (2x+5)e^x = 0$
$2x+5 = 0 \quad \vee \quad e^x = 0$ (k.n.)
$2x = -5$
$x = -2\frac{1}{2}$
$y = -4e^{-2\frac{1}{2}} = \frac{-4}{e^2\sqrt{e}}$
buigpunt $(-2\frac{1}{2}, \frac{-4}{e^2\sqrt{e}})$

b. $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$
$(2x+3)e^x = \dfrac{(2x+1)e^x}{x}$
$x(2x+3)e^x = (2x+1)e^x$
$x(2x+3) = 2x+1 \quad \vee \quad e^x = 0$ (k.n.)
$2x^2 + 3x = 2x + 1$
$2x^2 + x - 1 = 0$
$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$
$(x+1)(x-\frac{1}{2}) = 0$
$x = -1 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$
$f'(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ $\qquad f'(\frac{1}{2}) = 4e^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e}$
$y = \frac{1}{e}x$ $\qquad y = 4\sqrt{e} \cdot x$

c. $0 < a < \frac{1}{e} \quad \vee \quad a > 4\sqrt{e}$

d. $f'(x) = \dfrac{f(x) - 1}{x - 1}$

$$(2x+3)e^x = \frac{(2x+1)e^x - 1}{x-1}$$

neem $y_1 = (2x+3)e^x$ en $y_2 = \frac{(2x+1)e^x - 1}{x-1}$

intersect geeft: $x = -0{,}75$ dan $y = -0{,}24$

Opgave 37:

a. $f(x) = x\ln x - x$

$f'(x) = 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$

$f'(x) = \frac{f(x)+e^2}{x}$

$\ln x = \frac{x\ln x - x + e^2}{x}$

$x\ln x = x\ln x - x + e^2$

$x = e^2$

$f'(e^2) = 2$

$y = 2x + b$ door $(0,-e^2)$

$b = -e^2$

$y = 2x - e^2$

b. als $f'(x) = \ln x = 1$

$x = e$

$y = 0$

raaklijn: $y = x + b$ door $(e,0)$

$0 = e + b$

$b = -e$

$y = x - e$

$y_B = -1$ dus $-1 = x - e$

$x = e - 1$

als $f'(x) = \ln x = 0$

$x = 1$

$y = -1$

raaklijn is $y = -1$

$y_B = -1$ dus $x = 1$

dus $1 < b < e - 1$

c. $f'(x) = \frac{f(x)}{x-3}$

$\ln x = \frac{x\ln x - x}{x-3}$

neem $y_1 = \ln x$ en $y_2 = \frac{x\ln x - x}{x-3}$

intersect geeft $x = 1{,}86 \quad \vee \quad x = 4{,}54$

raaklijn m: $f'(1{,}86) = 0{,}62$

$y = 0{,}62x + b$ door $(3,0)$

raaklijn n: $f'(4{,}54) = 1{,}51$

$y = 1{,}51x + b$ door $(3,0)$

$0 = 1{,}86 + b$

$b = -1{,}86$

$m: \quad y = 0{,}62x - 1{,}86$

$0 = 4{,}54 + b$

$b = -4{,}54$

$n: \quad y = 1{,}51x - 4{,}54$

Opgave 38:

a. $f(x) = xe^{1-x}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot -e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$

$f''(x) = -1 \cdot e^{1-x} + (1-x) \cdot -e^{1-x} = -e^{1-x} - e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-2)e^{1-x} = 0$

$x = 2 \quad \vee \quad e^{1-x} = 0$ (k.n.)

$y = f(2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$

$f'(2) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

$y = -\frac{1}{e}x + b$ door $(2, \frac{2}{e})$

$\frac{2}{e} = -\frac{2}{e} + b$

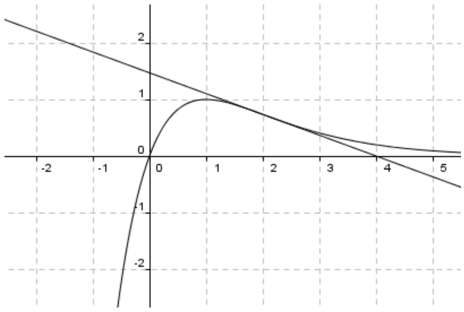
$b = \frac{4}{e}$

$y = -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e}$

snijpunt met *x*-as: $-\frac{1}{e}x + \frac{4}{e} = 0$

$-\frac{1}{e}x = -\frac{4}{e}$

$x = 4$

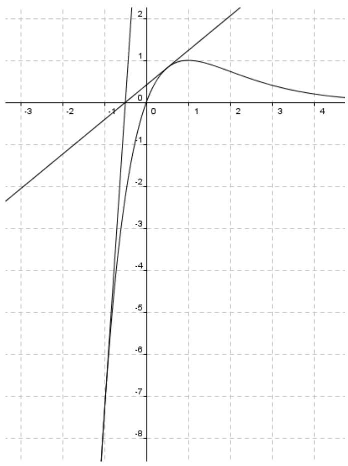


dus $A(4,0)$

als $p < 4$ dan kun je door het punt $(p,0)$ geen raaklijn tekenen aan de grafiek van *f*.

als $p > 4$ dan kun je door het punt $(p,0)$ twee raaklijnen tekenen aan de grafiek van *f* namelijk één aan de bovenkant en één aan de onderkant.

$p = 4$ is de overgangssituatie van geen naar twee raaklijnen.



b. de lijn $y = a(x + \frac{1}{2})$ gaat altijd door het punt $(-\frac{1}{2}, 0)$

voor de raaklijn aan de grafiek van *f* die door het punt $(-\frac{1}{2}, 0)$

gaat geldt: $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x + \frac{1}{2}}$

$(1-x)e^{1-x} = \dfrac{xe^{1-x}}{x + \frac{1}{2}}$

$(1-x)(x + \frac{1}{2})e^{1-x} = xe^{1-x}$

$e^{1-x} = 0 \quad \vee \quad (1-x)(x + \frac{1}{2}) = x$

k.n. $\qquad -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x$

$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$(x+1)(x - \frac{1}{2}) = 0$

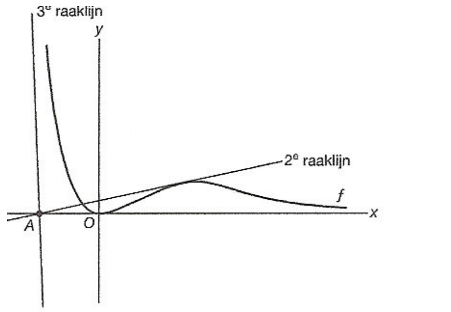
$x = -1 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$

$f'(-1) = 2e^2 \qquad f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e}$

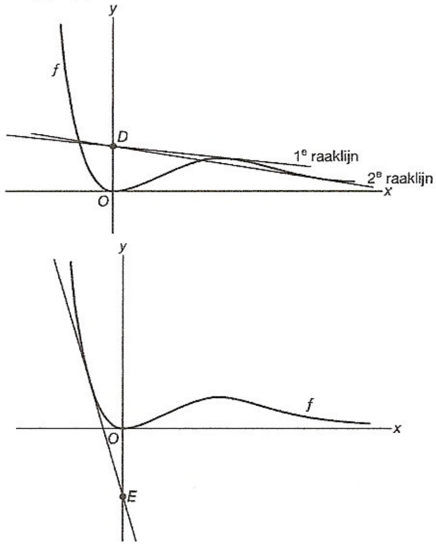
dus $a \leq 0 \quad \vee \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{e} \quad \vee \quad a = 2e^2$

Opgave 39:

a. de x-as is raaklijn en de twee getekende raaklijnen in de figuur hiernaast

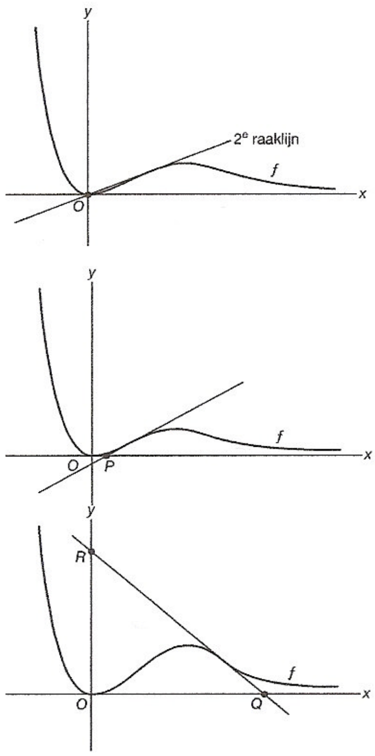


b. door punt B kun je maar één raaklijn tekenen, namelijk de x-as
door punt C kun je geen raaklijnen tekenen
door punt D kun je twee raaklijnen tekenen
door punt E kun je één raaklijn tekenen



c. de x-as is raaklijn aan de grafiek van f
er zijn drie punten op de x-as te vinden van waaruit je twee raaklijnen aan de grafiek van f kunt tekenen
het eerste punt is $O(0,0)$
het tweede punt is punt P, wat het snijpunt is van de (linker) buigraaklijn met de x-as
het derde punt is punt Q wat het snijpunt is van de (rechter) buigraaklijn met de x-as

d. ja, dat is punt R wat het snijpunt is van de (rechter) buigraaklijn met de positieve y-as



13.4 Raken en loodrecht snijden

Opgave 40:

a. $f(1) = 0,5 \cdot 1^2 + 1 + 1,5 = 3$

$g(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 = 3$

b. $f'(x) = x + 1$

$f'(1) = 2$

$k: \quad y = 2x + 1$ door $(1,3)$

$3 = 2 + b$

$b = 1$

$y = 2x + 1$

$g'(x) = -2x + 4$

$g'(1) = 2$

$l: \quad y = 2x + b$ door $(1,3)$

$3 = 2 + b$

$b = 1$

$y = 2x + 1$

c. punt A is het raakpunt van f en g

Opgave 41:

De grafieken van f en g hebben in het punt met $x = -3$ dezelfde helling maar de grafieken snijden elkaar niet.

Opgave 42:

a. $f'(x) = 3x^2 + 8x + 2$

$g'(x) = 2x + 11$

$f'(x) = g'(x)$ geeft: $3x^2 + 8x + 2 = 2x + 11$

$3x^2 + 6x - 9 = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x + 3)(x - 1) = 0$

$x = -3 \quad \vee \quad x = 1$

$f(-3) = 4 \quad f(1) = 8$

$g(-3) = 4 \quad g(1) = 40$

dus de grafieken van f en g raken elkaar in het punt $(-3,4)$

b. $f'(-3) = 5$

$y = 5x + b$ door $(-3,4)$

$4 = -15 + b$

$b = 19$

$y = 5x + 19$

Opgave 43:

Met de GR krijg je het vermoeden dat het raakpunt het punt $(-1,2)$ is.

$f(-1) = 2$ en $g(-1) = 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x+6}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}$ dus $f'(-1) = \tfrac{1}{2}$

$g'(x) = 2x + 2\frac{1}{2}$ dus $g'(-1) = \frac{1}{2}$
dus de grafiekem van *f* en *g* raken elkaar in het punt $(-1,2)$

Opgave 44:

$f'(x) = \dfrac{(2x+5)\cdot 4 - 4x \cdot 2}{(2x+5)^2} = \dfrac{8x+20-8x}{(2x+5)^2} = \dfrac{20}{(2x+5)^2}$

$g'(x) = 2x + 5$

$f'(x) = g'(x)$ geeft: $\dfrac{20}{(2x+5)^2} = 2x+5$

$(2x+5)^3 = 20$

$2x + 5 = \sqrt[3]{20}$

$2x = -5 + \sqrt[3]{20}$

$x = -2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{20}$

$f(-2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{20}) = -1{,}684$

$g(-2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{20}) = -1{,}658$

dus de grafieken van *f* en *g* raken elkaar niet

Opgave 45:

a. $f'(x) = e^x$

$g'(x) = e^{-x+2}$

$f'(x) = g'(x)$ geeft: $e^x = e^{-x+2}$

$x = -x + 2$

$2x = 2$

$x = 1$

$f(1) = e + 2$

$g(1) = 2e + 2 - e = e + 2$

dus de grafieken van *f* en *g* raken elkaar in het punt $(1, e+2)$

b. $Opp(V) = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx$

$= \int_0^1 (e^x + 2 - (2e + 2 - e^{-x+2})dx$

$= \int_0^1 (e^x - 2e + e^{-x+2})dx$

$= [e^x - 2e \cdot x - e^{-x+2}]_0^1$

$= e - 2e - e - (1 - 0 - e^2)$

$= e^2 - 2e - 1$

Opgave 46:

a. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

$g_1'(x) = 2x$

$f'(x) = g'(x)$ geeft: $\frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$

$2x\sqrt{2x} = 1$

$8x^3 = 1$

$x^3 = \frac{1}{8}$

$x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = 1 \quad g_1(\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{4}$ dus de grafieken van *f* en *g* raken elkaar niet

b. $g'_p(x) = 2x$

$f'(x) = g'(x)$ geeft: $\frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$

$x = \frac{1}{2}$ (zie opgave a)

$f(\frac{1}{2}) = 1$

$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + p = 1$

$p = \frac{3}{4}$

dus de grafieken van *f* en *g* raken elkaar voor $p = \frac{3}{4}$

Opgave 47:

a. $1 - \frac{1}{x} = p$ links en rechts vermenigvuldigen met *x* geeft:

$x - 1 = px$ invullen in $x - \ln x = px$ geeft:

$x - \ln x = x - 1$

b. $x - \ln x + 2 = p\sqrt{x}$ $\qquad 1 - \frac{1}{x} = \frac{p}{2\sqrt{x}}$

$p = \frac{x - \ln x + 2}{\sqrt{x}}$ $\qquad 2\sqrt{x} \cdot (1 - \frac{1}{x}) = p$

$\frac{x - \ln x + 2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \cdot (1 - \frac{1}{x})$

$x - \ln x + 2 = 2x(1 - \frac{1}{x})$

$x - \ln x + 2 = 2x - 2$

$4 - x - \ln x = 0$

neem $y_1 = 4 - x - \ln x$ optie zero geeft: $x = 2{,}926$ dus $p = 2{,}25$

Opgave 48:

$f'(x) = -2x + 8$

$g'_p(x) = 2x + p$

$2x + p = -2x + 8$

$p = -4x + 8$

$-x^2 + 8x - 12 = x^2 + x(-4x + 8)$

$-x^2 + 8x - 12 = x^2 - 4x^2 + 8x$

$2x^2 = 12$

$x^2 = 6$
$x = \sqrt{6} \quad \vee \quad x = -\sqrt{6}$
$p = 8 - 4\sqrt{6} \quad \vee \quad p = 8 + 4\sqrt{6}$

Opgave 49:
$f'(x) = 1 - e^x$
$g'(x) = 2x + p$
$2x + p = 1 - e^x$
$p = 1 - 2x - e^x$
$x - e^x = x^2 + x(1 - 2x - e^x)$
$x - e^x = x^2 + x - 2x^2 - xe^x$
$xe^x - e^x = -x^2$
neem $y_1 = xe^x - e^x$ en $y_2 = -x^2$
intersect geeft: $x = -0{,}883 \quad \vee \quad x = 0{,}739$
$p = 2{,}351 \quad \vee \quad p = -2{,}572$

Opgave 50:
a. $f_3'(x) = \frac{2}{x} + 3$
$g_q'(x) = 2x$
$2x = \frac{2}{x} + 3$
$2x^2 = 2 + 3x$
$2x^2 - 3x - 2 = 0$
$x^2 - 1\frac{1}{2}x - 1 = 0$
$(x - 2)(x + \frac{1}{2}) = 0$
$x = 2 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$ (vervalt)
$f_3(2) = 2\ln 2 + 6$ en $g_q(2) = 4 + q$
$4 + q = 2\ln 2 + 6$
$q = 2\ln 2 + 2$

b. $f_p'(x) = \frac{2}{x} + p$
$g_2'(x) = 2x$
$\frac{2}{x} + p = 2x$
$p = 2x - \frac{2}{x}$
$2\ln x + x(2x - \frac{2}{x}) = x^2 + 2$
$2\ln x + 2x^2 - 2 = x^2 + 2$
neem $y_1 = 2\ln x + 2x^2 - 2$ en $y_2 = x^2 + 2$
intersect geeft $x = 1{,}711$ dus $p = 2{,}252$

Opgave 51:

$f_p'(x) = 2 + \frac{p}{x}$

$g_p'(x) = 2px$

$2px = 2 + \frac{p}{x}$

$2px - \frac{p}{x} = 2$

$p(2x - \frac{1}{x}) = 2$

$p \cdot \frac{2x^2 - 1}{x} = 2$

$p = \frac{2x}{2x^2 - 1}$

$2x + \frac{2x}{2x^2 - 1} \cdot \ln x = \frac{2x}{2x^2 - 1} \cdot x^2$

neem $y_1 = 2x + \frac{2x}{2x^2 - 1} \cdot \ln x$ en $y_2 = \frac{2x^3}{2x^2 - 1}$

intersect geeft: $x = 1$

$p = 2$

Opgave 52:

$f'(x) = 2xe^{x^2 - 2} + 1$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$2xe^{x^2 - 2} + 1 = \frac{1}{x}$

neem $y_1 = 2xe^{x^2 - 2} + 1$ en $y_2 = \frac{1}{x}$

intersect geeft $x = -1,280$ (vervalt) $\vee$ $x = 0,742$

$q = 1,275$

Opgave 53:

$rc_l = -\frac{1}{3}$

Opgave 54:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $g'(x) = -x$

$f'(x) \cdot g'(x) = -1$ geeft:

$\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -x = -1$

$\frac{x}{2\sqrt{x}} = 1$

$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 1$

$\sqrt{x} = 2$
$x = 4$
$f(4) = 2$ en $g(4) = 2$ dus de grafieken van *f* en *g* snijden elkaar loodrecht in $(4,2)$

Opgave 55:

$f'(x) = \sqrt{2} \cdot \cos x$
$g'(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin x$
$f'(x) \cdot g'(x) = -1$ geeft:
$\sqrt{2} \cdot \cos x \cdot -\sqrt{2} \cdot \sin x = -1$
$2\cos x \sin x = 1$
$\sin 2x = 1$
$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
$f(\frac{1}{4}\pi) = 1$ en $g(\frac{1}{4}\pi) = 1$ dus de grafieken van *f* en *g* snijden elkaar loodrecht in $(\frac{1}{4}\pi, 1)$
$f(1\frac{1}{4}\pi) = -1$ en $g(1\frac{1}{4}\pi) = -1$ dus de grafieken van *f* en *g* snijden elkaar loodrecht in $(1\frac{1}{4}\pi, -1)$

Opgave 56:

$f_p'(x) = p \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$g'(x) = -\dfrac{8}{x^2}$
$f_p'(x) \cdot g'(x) = -1$ geeft:
$\dfrac{p}{2\sqrt{x}} \cdot -\dfrac{8}{x^2} = -1$
$8p = 2x^2\sqrt{x}$
$p = \frac{1}{4}x^2\sqrt{x}$
$f_p(x) = g(x)$ geeft:
$\frac{1}{4}x^3 = \dfrac{8}{x}$
$x^4 = 32$
$x = \sqrt[4]{32} = 2^{\frac{5}{4}} = 2 \cdot \sqrt[4]{2}$
$y = \dfrac{8}{2^{\frac{5}{4}}} = \dfrac{2^3}{2^{\frac{5}{4}}} = 2^{\frac{7}{4}} = 2 \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2 \cdot \sqrt[4]{8}$
$p = 2^{1\frac{1}{8}} = 2 \cdot \sqrt[8]{2}$

Opgave 57:

a. $f'(x) = 2x - 4$
$f'(5) = 6$ dus $rc_k = -\frac{1}{6}$
$k: \quad y = -\frac{1}{6}x + b$ door $(5,5)$
$5 = -\frac{5}{6} + b$

$b = 5\frac{5}{6}$

$y = -\frac{1}{6}x + 5\frac{5}{6}$

b. $rc_l = -5$ dus $g'(x) = \frac{1}{5}$

$g'(x) = \frac{(x+2)\cdot 2 - (2x-1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{1}{5}$

$(x+2)^2 = 25$

$x+2 = 5 \quad \vee \quad x+2 = -5$

$x = 3 \quad \vee \quad x = -7$

$y = 1 \qquad y = 3$

$p = 16 \quad \vee \quad p = -32$

c. $rc_m = -8$ dus $h'(x) = \frac{1}{8}$

$$h'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}\cdot 2 - 2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot 2x}{x^2+4}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+4} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}$$

$$= \frac{\frac{2(x^2+4)-2x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} =$$

$$= \frac{8}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{8}$$

$(x^2+4)\sqrt{x^2+4} = 64$

$(x^2+4)^3 = 4096$

$x^2 + 4 = 16$

$x^2 = 12$

$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \vee \quad x = -2\sqrt{3}$

$y = \sqrt{3} \qquad y = -\sqrt{3}$

$q = 17\sqrt{3} \quad \vee \quad q = -17\sqrt{3}$

Opgave 58:

$rc_k = -\frac{1}{2}$ dus $f_p'(x) = 2$

$f_p'(x) = 2xe^x + (x^2 - p)e^x = (x^2 + 2x - p)e^x = 2$

$x^2e^x + 2xe^x - pe^x = 2$

$-pe^x = -x^2e^x - 2xe^x + 2$

$p = x^2 + 2x - \frac{2}{e^x}$

$(x^2 - (x^2 + 2x - \frac{2}{e^x}))e^x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$(\frac{2}{e^x} - 2x)e^x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$2-2xe^{x}=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

neem $y_1=2-2xe^{x}$ en $y_2=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

intersect geeft $x=-5{,}12 \quad \vee \quad x=-0{,}70$

$y=2{,}06 \qquad y=-0{,}85$

dus $A(-5{,}12\,;2{,}06)$ of $A(-0{,}70\,;-0{,}85)$

Opgave 59:

a. $f(x)=e^{1-x^2}$

$f'(x)=-2xe^{1-x^2}$

$f''(x)=-2e^{1-x^2}+-2x\cdot-2xe^{1-x^2}=(4x^2-2)e^{1-x^2}=0$

$4x^2-2=0 \quad \vee \quad e^{1-x^2}=0$

$4x^2=2$ k.n.

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \vee \quad x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$y=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e} \qquad y=\sqrt{e}$

$(\frac{1}{2}\sqrt{2},\sqrt{e})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\sqrt{e})$

b. $f'(x)=-2x\cdot e^{1-x^2}=-\frac{1}{a}$

$a=\dfrac{1}{2xe^{1-x^2}}$

$e^{1-x^2}=\dfrac{x}{2xe^{1-x^2}}$

$e^{1-x^2}=\dfrac{1}{2e^{1-x^2}}$

neem $y_1=e^{1-x^2}$ en $y_2=\dfrac{1}{2y_1}$

intersect geeft $x=1{,}16 \quad \vee \quad x=-1{,}16$

$a=0{,}61 \quad \vee \quad a=-0{,}61$

Opgave 60:

a. $f'(x)=3x^2-1$

$g'_p(x)=-\dfrac{p}{x^2}$

$f'(x)=g'_p(x)$ geeft:

$3x^2-1=-\dfrac{p}{x^2}$

$3x^4-x^2=-p$

$p=-3x^4+x^2$

$x^3-x=\dfrac{-3x^4+x^2}{x}$

$x^3-x=-3x^3+x$

$4x^3 - 2x = 0$

$2x(2x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 2x^2 = 1$

$x^2 = \tfrac{1}{2}$

$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$p = -\tfrac{1}{4} \quad \vee \quad p = -\tfrac{1}{4}$

b. $f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

$(3x^2 - 1) \cdot -\dfrac{p}{x^2} = -1$

$p = \dfrac{x^2}{3x^2 - 1}$

$x^3 - x = \dfrac{\frac{x^2}{3x^2 - 1}}{x}$

$x^4 - x^2 = \dfrac{x^2}{3x^2 - 1}$

$x^2(x^2 - 1)(3x^2 - 1) = x^2$

$x^2 = 0 \quad \vee \quad (x^2 - 1)(3x^2 - 1) = 1$

$3x^4 - 4x^2 + 1 = 1$

$3x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2(3x^2 - 4) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 3x^2 = 4$

$x^2 = \tfrac{4}{3}$

$x = \sqrt{\tfrac{4}{3}} \quad \vee \quad x = -\sqrt{\tfrac{4}{3}}$

$y = \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{4}{3}} \qquad y = \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{4}{3}}$

$p = \tfrac{4}{9} \qquad B(\sqrt{\tfrac{4}{3}}, \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{4}{3}})$ of $B(-\sqrt{\tfrac{4}{3}}, \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{4}{3}})$